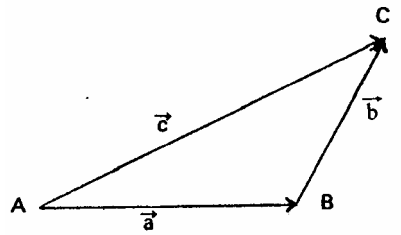
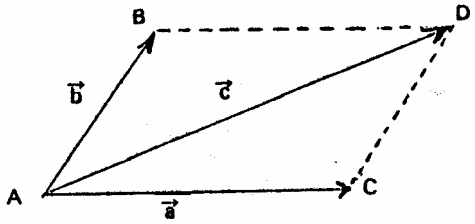
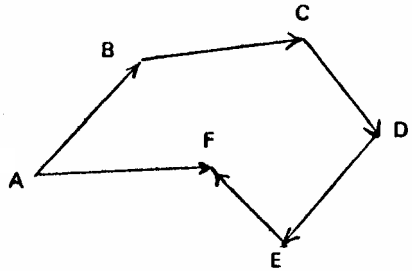
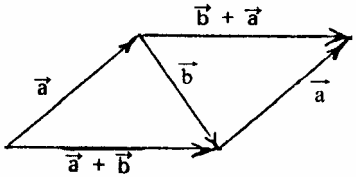
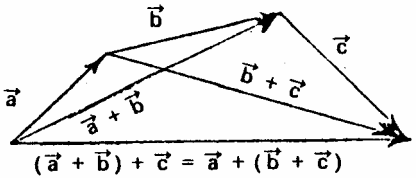
单元 A7：R^2 及 R^3 的向量

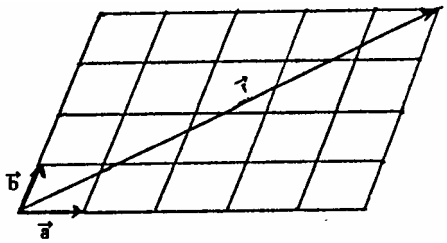
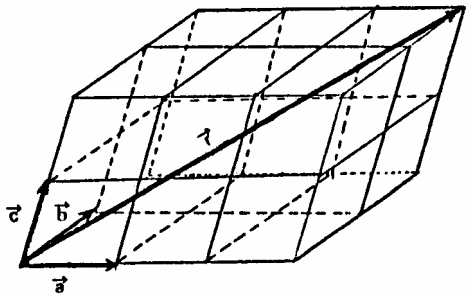
特定目标：

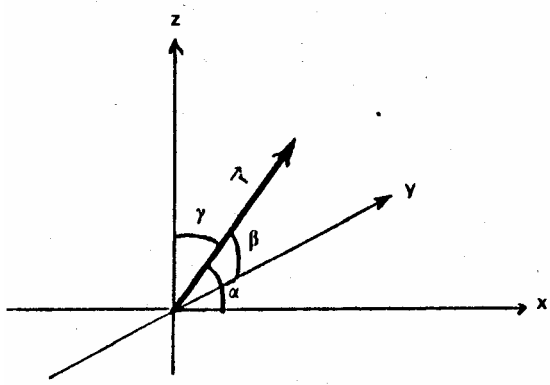
1.学习 R^2 及 R^3 的向量运算。
2.理解向量的线性相关及线性无关的概念。
3.向量在几何问题上的应用。

内容	时间分配	教学建议
7.1 向量及纯量的定义	1	教师应在此单元开始时对学生解释向量及纯量的分别和介绍表示向量的图解及写法。现行的向量记法（如 $\overrightarrow{AB}$ 、**AB**、 $\vec{a}$ 、**a**）及向量大小的记法（如 $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ 、$\lvert\mathbf{AB}\rvert$、$\lvert\vec{a}\rvert$ 、$\lvert\mathbf{a}\rvert$）都应教授。下列各项 ： 零向量、单位向量、等向量、负向量、共线向量及共面向量亦应定义。
7.2 向量的运算	7	学生应认识向量加法定律〈即三角形定律、平行四边形定律及多边形定律〉，向量减法及纯量乘法。 (i) 三角形定律  $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ 或 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ 当使用此定律求 $\vec{a}+\vec{b}$ 时，教师须指出向量 $\vec{a}$ 的终点应与向量 $\vec{b}$ 的始点重叠。亦应让学生注意当 A、B 及 C 点共线时，此定律仍然适用。

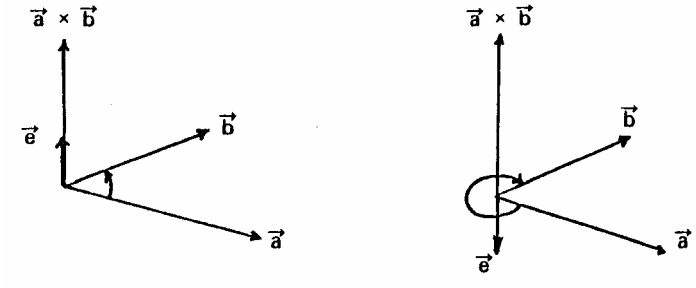
内容	时间分配	教学建议
		(ii) 平行四边形定律  $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ 或 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ 同样地，教师应提醒学生向量 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的始点应重叠，而在上两图中 $\vec{c}$ 可视为 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的向量和。三角形定律和平行四边形定律的等价性是值得讨论的。 (iii) 多边形定律  $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$

内容	时间分配	教学建议
		向量代数定律如交换律、结合律和分配律应介绍给学生认识。下列各图有助解释各性质。 (a) 加法交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$  (b) 加法结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$  (c) 纯量乘法结合律： $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$ 纯量乘法分配律： $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ 明白纯量乘法概念后，学生应不难得出： 若 $\vec{a}=\alpha\vec{b}$，其中 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 为非零向量而α为一些纯量，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是平行向量。

内容	时间分配	教学建议
		学生应清楚在 $\mathbf{R}^2$ 及 $\mathbf{R}^3$ 中将向量分解为分量及以分量和表示另一向量的方法。$\mathbf{R}^2$ 中的向量分解可以下列例子介绍。在第一个例子中，向量 $\vec{r}$ 分解为两个分别在方向 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 的向量 $5\vec{a}$ 及 $4\vec{b}$，由此可推广至 $\mathbf{R}^2$ 中 $\vec{r}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$，其中 $\vec{a}$ 及 $\vec{b}$ 为不共线向量和在 $\mathbf{R}^3$ 中 $\vec{r}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$，其中 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 及 $\vec{c}$ 为非共面向量和α、β及 γ为纯量。 *例*： 1.  $\vec{r}=5\vec{a}+4\vec{b}$ 2. $\vec{r}=3\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}$  再者，教师应和学生讨论以向量分量表向量的纯量乘法、加法及减法。

内容	时间分配	教学建议
7.3 于直角坐标系中的向量分解	2	教师应详细解释 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 及 $\vec{k}$ 分别是在正 x－轴、 y－轴及 z－轴的单位向量和在 $\mathbf{R}^2$ 及 $\mathbf{R}^3$ 中任一向量可用 $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ 表示。 学生须认识以 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 和 $\vec{k}$ 表示的向量的性质： (i) $\lvert a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}\rvert=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (ii) 若 $a_1:b_1:c_1=a_2:b_2:c_2$， 则向量 $\vec{r_1}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ 与 $\vec{r_2}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ 平行。 再者，教师应用图解释向量 $\vec{r}$ 的方向比、方向余弦及方向角。下列性质亦应加以讨论。 (i) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ (ii) $\frac{\vec{r}}{\lvert\vec{r}\rvert}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$ 。 

内容	时间分配	教学建议
7.4 向量的线性组合	4	教师应说明下列定义： (i) 若 $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$，$\vec{r_3}$，…，$\vec{r_n}$ 为一个向量集，则 $\lambda_1\vec{r_1}+\lambda_2\vec{r_2}+\lambda_3\vec{r_3}+\ldots+\lambda_n\vec{r_n}$，其中 λ_1，λ_2，λ_3，…，λ_n 为纯量，称为 $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$，$\vec{r_3}$，…，$\vec{r_n}$ 的向量线性组合。若各纯量 λ 非全为零，则此线性组合称为非平凡，否则为平凡线性组合。 (ii) 若向量 $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$，$\vec{r_3}$，…，$\vec{r_n}$ 存在一等于零的非平凡线性组合，则它们称为线性相关，即 $\lambda_1\vec{r_1}+\lambda_2\vec{r_2}+\lambda_3\vec{r_3}+\ldots+\lambda_n\vec{r_n}=\vec{0}$ ，其中有部分 $\lambda_i\neq 0$，$i=1$，2，3，…，n。 (iii) 若向量 $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$，$\vec{r_3}$，…，$\vec{r_n}$ 的唯一等于零的线性组合就是平凡线性组合，则它们称为线性无关，即若 $\lambda_1\vec{r_1}+\lambda_2\vec{r_2}+\lambda_3\vec{r_3}+\ldots+\lambda_n\vec{r_n}=\vec{0}$，则 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\ldots=\lambda_n=0$ 。 教师应协助学生由(ii)得出一个实时结果，就是向量 $\vec{r_1}$，$\vec{r_2}$，$\vec{r_3}$，…，$\vec{r_n}$ 为线性相关当且仅当其中一个向量是同组中其它向量的线性组合。 在 $\mathbf{R}^2$ 及 $\mathbf{R}^3$ 中线性相关向量的几何意义应加以说明。如 (i) 在 $\mathbf{R}^2$ 中，向量 $\vec{r_1}$ 及 $\vec{r_2}$ 为线性相关当且仅当它们是平行向量； (ii) 在 $\mathbf{R}^3$ 中，向量 $\vec{r_1}$、$\vec{r_2}$ 及 $\vec{r_3}$ 为线性相关当且仅当它们是共面向量。
7.5 纯量 (点) 积及向量 (叉) 积	6	两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的纯量积，写作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，定义为 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\theta$ ，其中 θ 为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 之间的夹角。下列各性质应加以讨论： 1. 纯量积的交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ 2. 纯量积的分配律：$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ 3. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert^2$ 4. 两非零的向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 为正交当且仅当 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ 5. $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$

内容	时间分配	教学建议
		教师应特别指出由第 5 点用纯量积可求出以笛卡儿分量表示两向量的交角。教师应指导学生求证 $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$、$\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ 等及 $\vec{r_1}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$、$\vec{r_2}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$、$\vec{r_1}\cdot\vec{r_2}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$。 矢量积的定义须清楚介绍，教师亦应特别说明右手系统的正确方法。两向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的矢量积，写作 $\vec{a}\times\vec{b}$，定义为 $\vec{a}\times\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta\,\vec{e}$，其中 (i) $\vec{e}$ 为垂直于 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的单位向量； (ii) θ 为由 $\vec{a}$ 量度至 $\vec{b}$ 的角度，而量度是根据右手法则来决定 $\vec{e}$ 的方向。  下列各性质有讨论的必要： (i) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$ (ii) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ 及 $(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$ (iii) $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$ (iv) $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

内容	时间分配	教学建议
		学生应自已求证 $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}$、$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ 等用来计算以笛卡儿分量表示两向量 $\vec{r_1}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ 及 $\vec{r_2}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ 的矢量积， $\vec{r_1}\times\vec{r_2}=(b_1c_2-b_2c_1)\vec{i}+(c_1a_2-c_2a_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$ 或 $=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}$ 下列两个性质有助学生掌握矢量积的概念： (i) 两非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 平行当且仅当 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$； (ii) $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$ 可视为由向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 所组成的平行四边形的面积。
7.6 向量在几何的应用	11	教师应详细解释相对向量的用途，包括位置向量和位移向量。P 及 Q 两点对基准点 O 的位置向量通常分别以 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$ 或 $\vec{p}$、$\vec{q}$ 表示，而 $\overrightarrow{PQ}=\vec{q}-\vec{p}$ 亦应加以强调。 教师应导出下列结果而其它有关的推论亦值得讨论。 分点的位置向量： 设 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 及 $\vec{p}$ 分别为 A、B 及 P 对基准点 O 的位置向量。若 P 以 $m:n$ 的比分线段 AB，则 $\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$。 内分点与外分点的处理方法应分别讨论。为准备学生学习通过 A、B 两点的直线的向量方程，建议采用公式 $\vec{p}=\dfrac{k\vec{a}+\vec{b}}{1+k}$。在笛卡儿坐标系中，若 A 为$(x_1, y_1, z_1)$、$B(x_2, y_2, z_2)$ 及 $P(x, y, z)$，学生不难得到一直线的两点式 $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$。

内容	时间分配	教学建议
		于此，学生应先学会写出向量 $\vec{b}-\vec{a}$ 的方向数，从而将两点式转为 (i) 对称式 $\frac{x-x_1}{\ell}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ 及 (ii) 参数式 $x=x_1+\ell$ $y=y_1+m$ $z=z_1+n$ 其中 $\ell:m:n$ 代表直线的方向数。 作为一个延续，通过点 (x_1, y_1, z_1) 而法线的方向比为 $\ell:m:n$ 的平面方程可作为纯量积的应用： $\ell(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0$ 在此，平面方程的通式 $Ax+By+Cz+D=0$ 亦可介绍作为补充材料，并讨论下列各性质。 (i) 平面法线的方向比为 $A:B:C$。 (ii) 由点 $P(x', y', z')$到平面的垂直距离为 $\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$，其中符号的选择在使整个表达式为正数。 (iii) 两平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 及 $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的夹角θ可 由下式求得 $\cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$。 (iv) $\pi_1 // \pi_2$ 当且仅当 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$； $\pi_1 \perp \pi_2$ 当且仅当 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$。

36

内容	时间分配	教学建议
		(v) 平分两个平面π_1及π_2的夹角的平面方程为 $\frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$。 由线及平面的普通知识，教师可引导学生知道 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 代表两平面 π_1 及π_2 (若不平行) 的相交线，而这直线的方向比为 $\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\B_2 & C_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\C_2 & A_2\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\A_2 & B_2\end{vmatrix}$。 下列有关方向比为 $p:q:r$ 的直线 L 及平面π：$Ax+By+Cz+D=0$ 的性质应予讨论： (i) $L // \pi$ 当且仅当 $Ap+Bq+Cr=0$ (ii) $L \perp \pi$ 当且仅当 $\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r}$ (iii) L 与 π 的夹角 θ 由下式得出 $\sin\theta=\left\lvert\frac{Ap+Bq+Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{p^2+q^2+r^2}}\right\rvert$ 两直线共面的条件亦应学习，即两直线共面当且仅当此两直线相交或平行。假若 L_1 是 $\frac{x-a_1}{p_1}=\frac{y-b_1}{q_1}=\frac{z-c_1}{r_1}$ 及 L_2 是 $\frac{x-a_2}{p_2}=\frac{y-b_2}{q_2}=\frac{z-c_2}{r_2}$， L_1 与 L_2 共面当且仅当 $\begin{vmatrix}a_1-a_2 & p_1 & p_2\\b_1-b_2 & q_1 & q_2\\c_1-c_2 & r_1 & r_2\end{vmatrix}=0$ 在此小单元中，教师应鼓励学生应用向量方法来导出上述的性质和结果，尤其是利用点积求一向量 $\vec{p}$ 在另一向量 $\vec{r}$ 上的投影及利用叉积求一个给定三顶点的三角形面积。
	31	

37