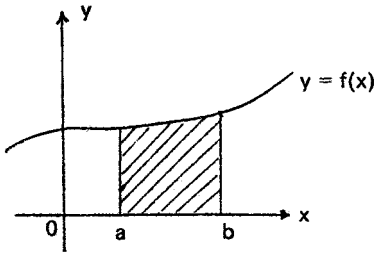
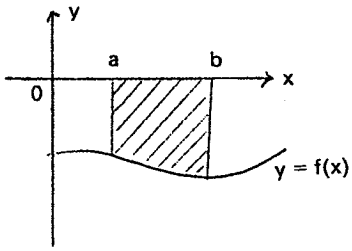
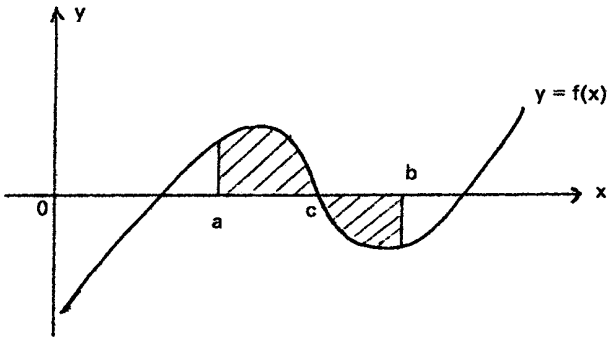
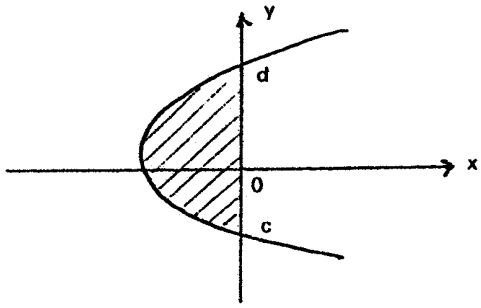
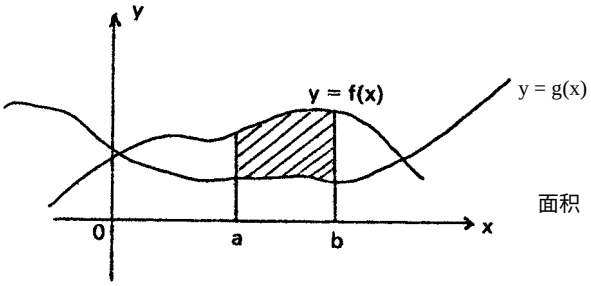
单元 B6：积分法的应用

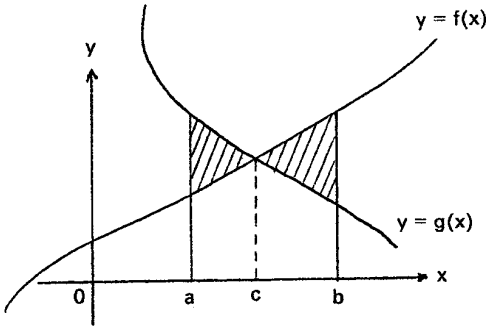
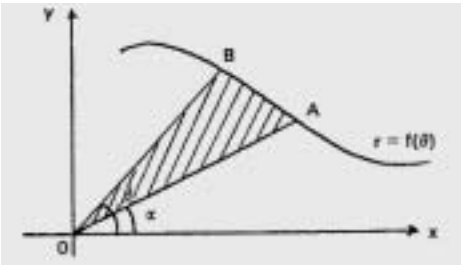
特定目标：

1. 学习应用定积分来计算平面面积、弧长、旋转体的体积及旋转曲面面积。
2. 应用定积分计算和的极限。

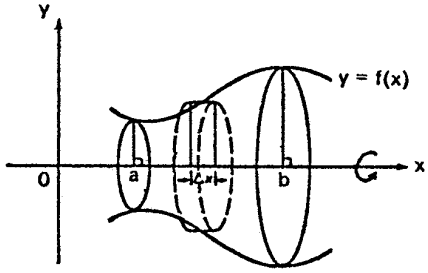
内容	时间分配	教学建议
6.1 平面面积	5	作为定积分定义的延续，由曲线 y = f(x)、垂直线 x = a、x = b 及 x－轴包围的面积可以根据有关函数的性质(即函数图像在 x－轴之上或之下)用下列方法计算出来。 情况(1)：当y = f(x)在区间[a，b]内连续及非负，则面积可以下式表示 $\int_a^b f(x)dx$  情况(2)：当 y=f(x)在区间[a，b]内连续及非正，则面积可以下式表示 $-\int_a^b f(x)dx$ 

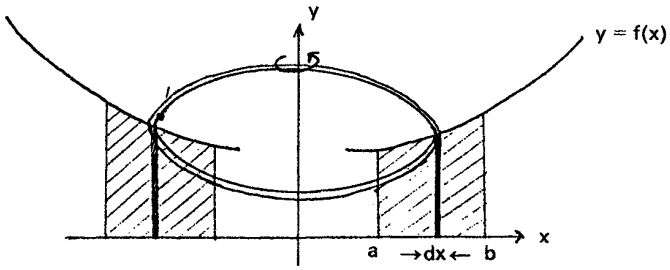
内容	时间分配	教学建议
		情况(3)：当 y = f(x)在区间[a，b]内连续及取值时正时负，则可以下列简例的程序求其面积。  面积表示式为 $\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$ 。 教师宜提醒学生在计算图像在 x－轴之下的面积时应留意加入负号，并应鼓励学生先作函数草图以获得更清晰的了解。

内容	时间分配	教学建议
		教师也应就曲线图像与 y－轴所围成的面积的各个不同情况详加阐释， 下面是一个例子。  面积表示式为 $-\int_c^d x\,dy$ 。 至于由两条曲线所围成的面积的计算，教师可与学生详细讨论下列图示的方法及其变着，并应利用足够的例子加以说明。  面积 = $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$

内容	时间分配	教学建议
		 面积= $\int_a^c [g(x)-f(x)]dx$ + $\int_c^b [f(x)-g(x)]dx$ 当曲线以极方程 $r = f(\theta)$ 表示，则曲线与两半径围成的面积为 $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\theta$ 。 

内容	时间分配	教学建议
88 **6.2 弧长**	3	当曲线以参数方程形式表示时，例如 x = x(t)；y = y(t)，则所围成的面积以下式表示 $\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)dt$，其中 A 及 B 点的参数分别为 t_0 及 t_1。 要令学生掌握计算面积的技巧，教师宜引入更多例子，包括不同方法及其变着，使学生有更深入的了解。下列例子可加入考虑： (1) 求抛物线 $y^2 = 5-x$ 及直线 y = x+1 所围成的面积。（注：此面积可以对 x 或对 y 积分而求得，教师宜示范两个方法。） (2) 证明心脏线 $r = a(1+\cos\theta)$ 所围成之面积为 $\frac{3a^2\pi}{2}$。 (3) 利用椭圆的参数方程 $x = a\cos\theta$；$y = b\sin\theta$，证明椭圆的面积为 πab。（注：教师宜指导学生利用图像的特别几何性质，例如对称性质，去简化计算过程。） 曲线 y = f(x)在两点 x = a 及 x = b 之间的弧长以 $\int_a^b\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$ 表示。 若曲线以参数形式 x = x (t)；y = y (t)表示，则由 $t = t_1$ 至 $t = t_2$ 之间的弧长为 $\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dt$。 若曲线以极形式 r = r(θ)表示，则由 $\theta = \alpha$ 至 $\theta = \beta$ 之间的弧长为 $\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}\,d\theta$。 教师可用下列建议的例子作说明或与学生讨论之用。 (1) 证明闭合曲线（星形线）$x = a\cos^3\theta$；$y = a\sin^3\theta$ 的周界为 6a。 (曲线图形的对称性可加利用) (2) 证明心脏线 $r = a(1 + \cos\theta)$ 的周界长度为 4a。 (3) 求曲线 $x^3 = 8y^2$ 由 x = 1 至 x = 3 的弧长。

内容	时间分配	教学建议
89 **6.3 旋转体的体积**	4	(注：教师在选择曲线作示范用途时，宜留意与椭圆有关的例子，在可能范围内应与学生作简短的讨论，藉以扩阔他们对数学其它支派的认识。教师可参考下列方法，并作简单介绍： 对椭图 $x = a\sin\theta$；$y = b\cos\theta$，恒有 $\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2=\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta=a^2(1-e^2\sin^2\theta)$， 其中 $e=\frac{b}{a}$ 为离心率。由短轴一末端起计之弧长 s 是 $a\int_0^\phi\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}\,d\theta$。此积分不能以有限形式的初等函数表示，它是第二类的椭圆积分，并通常以 $E(e,\phi)$ 表示。 为了完整起见，教师可引入第一类椭图积分，即 $\int_0^\phi\frac{d\theta}{\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}}$，它通常以 $F=(e,\phi)$ 表示。） 在教授旋转体的体积时，教师宜与学生讨论旋转体的形成及其意义，同时也应引入旋转轴这名词，好让学生能认识及分辨由某个曲线线段或面积沿着某一旋转轴旋转而成的旋转体，之后教师可教授下列两个常用计算旋转体的体积的方法： (1) 圆盘法 

内容	时间分配	教学建议
		教师宜向学生强调圆盘元素体积 ΔV 或 dV 的公式为 $dV=\pi y^2dx$ ，它代表图盘的体积。整个固体的体积为 $\pi\int_a^b y^2dx$ 。教师更可向学生介绍曲线沿 y－轴旋转所形成的体积是 $\pi\int_c^d x^2\,dy$ 。 (2) 外壳法  在这里，元素体积是 $2\pi xydx$ 及整体体积为 $2\pi\int_a^b xydx$ 。 有些情形，旋转体的体积可能由曲线沿着 x－轴或 y－轴以外的线旋转或将两曲线围成的面积旋转所形成，所以教师宜利用例子将各种可能情况加以阐明，并推导下列公式供学生参考。 $\pi\int_a^b [[f(x)]^2-[g(x)]^2]\,dx$ 或 $\pi\int_c^d [[f(y)]^2-[g(y)]^2]\,dy$ 教师宜提供足够的例子作说明，下列例子可作参考。

内容	时间分配	教学建议
		(1) 证明由椭圆 $x=a\cos\theta$；$y=b\sin\theta$ 沿 x－轴旋转所形成的体积是 $\frac{4}{3}\pi ab^2$ 。 (注：教师可要求学生从结果引申出半径为 r 的圆球体体积。) (2) 求将曲线 $y=x^3$、直线 $x=2$ 及 x－轴所围成的面积沿直线 $x=2$ 旋转所形成的体积。 (注：教师可用圆盘法和外壳法两个方法解这问题。)
6.4 旋转体的表面面积	4	将曲线 $y=f(x)$上由 $x=a$ 至 $x=b$ 的弧沿 x－轴旋转所产生的表面面积是 $2\pi\int_a^b yds$ 其中 ds 是弧长的元素，该面积公式通常以 $2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$ 表达。若同样的弧长沿 y－轴旋转，表面面积为 $2\pi\int_c^d xds$ 或 $2\pi\int_c^d x\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\,dy$ 其中 c 及 d 分别为该弧末端的纵坐标。 若曲线以极形式表式并以θ为自变量，则面积为 $2\pi\int_\alpha^\beta y\frac{ds}{d\theta}d\theta$ 其中 $y=r\sin\theta$及 $\frac{ds}{d\theta}=\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}$ 。同样地，若曲线以参数形式 $x=x(t)$；$y=y(t)$表示，由 $t=t_0$ 至 $t=t_1$ 之曲线部分长度沿 x 一轴旋转所形成的表面面积是 $2\pi\int_{t_0}^{t_1} y(t)\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,dx$ 。 教师可与学生讨论下列例子： (1) 证明抛物线由原点至(4，4)的弧长沿 x－轴旋转形成的表面面积为 $\frac{8\pi}{3}(5\sqrt{5}-1)$ 。 (2) 证明心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 沿始线旋转所产生的表面面积为 $\frac{32}{5}\pi a^2$ 。

内容	时间分配	教学建议
6.5 和的极限	4	(3) 证明旋轮线 $x = a(1-\sin\theta)$ ； $y = a(1-\cos\theta)$ 沿 x－轴旋转所形成的表面面积为 $\frac{64}{3}\pi a^2$ 。 (4) 证明星形线 $x = a\cos^3 t$ ， $y = a\sin^3 t$ 沿 x－轴旋转所形成的表面面积为 $\frac{12}{5}\pi a^2$ 。 这是一个应用定积分有趣的课题。教师宜利用一些简单但明显的例子如 $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}+\frac{n}{n^2}$ 作为引入，并提供适当的提示，使学生能发现合适的定积分、积分区间与恰当的分割，而最重要是能选取正确的被积函数，来表示无限级数的极限。对此例而言，被积函数为 $f(x) = x$ ，区间为$[0, 1]$ 而分割为 0， $\frac{1}{n}$ ， $\frac{2}{n}$ ， $\frac{3}{n}$ ，…， $\frac{n-1}{n}$ ，1。学生不难发现下列结果： $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\cdot\frac{1}{n}$ $= \int_0^1 x dx$ $= \frac{1}{2}$ 教师可提供更多如下列之例子 (1) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}) = \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \ell n\ 2$ (2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\ldots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right) = \int_0^1\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

内容	时间分配	教学建议
		(3) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(2n-1)}})$ $= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n-1}{n}}})$ $= \int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2(\sqrt{2}-1)$ 务求使学生获得更深入的了解及增进他们的运算技巧。下列是一个值得与学生讨论的例子： 求 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ 。先将它转换为 $\ell n\ y = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ell n(\frac{i}{n})$ ，其中 $y = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ $= \int_0^1 \ell n\ x dx$ $= -1$ 故得 $y = e^{-1}$ (注：教师教授此部分时，可令学生参考单元 B5，使他们能与黎曼和作为和的极限联系起来。) 教师必须提醒学生并不是所有和的极限都可用此法解答，调和级数， $\sum\frac{1}{n}$ ，是其中一个例子。
	20	