单元 B3：微分法

特定目标：

1. 掌握微分法的不同技巧。
2. 学习及掌握求高阶导数的技巧。
3. 理解洛尔定理及中值定理的直观概念。

内容	时间分配	教学建议
3.1 微分法的基本法则	4	作为延续，教师应讲解以下法则： (1) $\frac{d}{dx}(k)=0$，其中 k 为常数 (2) $\frac{d}{dx}(x^r)=rx^{r-1}$，r 为实数 (3) $\frac{d}{dx}[f(x)\pm g(x)]=\frac{d}{dx}f(x)\pm\frac{d}{dx}g(x)$ (4) $\frac{d}{dx}[kf(x)]=k\frac{d}{dx}f(x)$，其中 k 为常数 (5) $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]=g(x)\frac{d}{dx}f(x)+f(x)\frac{d}{dx}g(x)$ (积法则) (6) $\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}]=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$， $g(x)\neq 0$ (商法则) 教师可提供以上法则的证明，藉以加强学生在概念上及技巧上的掌握。从(3)至(6)，要强调 f(x)及 g(x)的导数的存在。关于(2)，对 r 为整数的证明已足够，对 r 为实数的证明可留待至学生已学习链式法则及对数微分法。教师应列举一些常见的函数以示范使用以上法则求导数。
3.2 三角函数的微分法	2	教师应讲解以下函数的微分法 ： 1. $\sin x$ 2. $\cos x$

内容	时间分配	教学建议
		3. $\tan x$ 4. $\operatorname{cosec} x$ 5. $\sec x$ 6. $\cot x$ 教师可鼓励学生作出以上的证明，并提示学生(4)至(6)的证明可使用商法则。
3.3 复合函数及逆函数的微分法	4	复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数可透过链式法则 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ 或 $=f'(t)g'(x)$，其中 $t=g(x)$，求得。 $y=f(x)$ 的逆函数 $x=f^{-1}(y)$ 的导数，可利用 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ 求得。
3.4 隐函数的微分法	2	教师可用以下例子作示范 ： $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)$、$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)$、$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$ 及 $\frac{d}{dx}(x^{-n})$、$\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}})$，其中 n 为正整数。 隐函数 $F(x，y)=0$ 的微分法，可利用上述各法则，对于自变量 x，求方程各项的导数。教师应给予示例，加强与学生的讨论，下列是一些建议： (i) 若 $x\cos y^3+y\sin 2x=1$，求 $\frac{dy}{dx}$。 (ii) 已知 $2x^2-y^2+12x-2y+3=0$，求在点(2，5) 的导数 $\frac{dy}{dx}$。 (iii) 对 $\cos(x^2-y^2)=xy$，求 $\frac{dy}{dx}$。

内容	时间分配	教学建议
3.5 参数方程的微分法	2	对于用参数方程 $x = u(t)$，$y = v(t)$ 表达的函数 $y = f(x)$，y 可被表为对 t 的复合函数 $y = f(u(t))$。透过键式法则，可得出 $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$，故此 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ 或 $f'(x) = \frac{v'(t)}{u'(t)}$。学生需明白在求导时。u(t) 及 v(t)必须为可微的及 $u'(t) \neq 0$。 教师可示范以下求 $\frac{dy}{dx}$ 的例子： (i) 椭圆 $x = a\cos t$，$y = b\sin t$ (ii) 旋轮线 $x = a(t-\sin t)$，$y = a(1-\cos t)$
3.6 对数函数及指数函数的微分法	6	教学范围包括以下法则，教师可使用建议的方法提供证明： 1. $\frac{d}{dx}(\ell n\, x) = \frac{1}{x}$ (用 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$) 2. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ (用 $\frac{d}{dx}\ell n\, y = \frac{1}{y}$ 及链式法则，其中 $y = e^x$ 或应用逆函数的求导法则) 3. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\,\ell n\, a}$ 4. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x\,\ell n\, a$ 教师应提供如下列的例子： e^{x^3} 及 $\log_a \sqrt{x^2+1}$ 。 (注意：为求完整起见，教师可与学生讨论，对n为有理数及实数，公式 $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ 的证明。) 教师应强调一些应用对数微分法的例子，例如：

内容	时间分配	教学建议
		当 y 为 x 的复杂的函数，尤其当 y 涉及变量指数，导数 $\frac{dy}{dx}$ 可从对数微分法求得。下列是一些常见的例子： $y = x^x$ 及 $y = \frac{(x+a)(x+b)}{(x+c)(x+d)}$ 。
3.7 高阶导数及莱布尼兹定理	5	教师应引入高阶导数的定义及符号 $f''(x)$、$f^{(n)}(x)$、$\frac{d^n y}{dx^n}$ 的意义。此外，学生亦应能求以参数方程表达的函数的高阶导数和应用莱布尼兹定理 $\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \sum_{r=0}^{n} C_r^n\, u^{(n)}\, v^{(n-r)}$。学生可尝试以数学归纳法证明此定理。教师应示范以莱布尼兹定理求涉及函数的高阶导数的方程，尤其涉及隐函数，下列是一些例子： 1. 求 $\cos^2 x \sin x$ 和 $x^3 \cos x$ 的 n 阶导数。 2. 设 $f(x) = \tan^{-1} x$ 。证明 $(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$ 及求对 $x = 0$，f(x)的n阶导数。 3. 已知 $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ 。 证明 $f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & 若\ n\ 為偶數 \\ -n! & 若\ n\ 為奇數 \end{cases}$， 其中 n 为整数及 $n \geq 3$ 。
3.8 洛尔定理及中值定理	3	教师应讲解洛尔定理和中值定理的直观概念及其几何意义。对于能力较高的学生，则可提供定理的证明。学生应学习简单及直接应用定理的题目。可考虑下列问题 ： 1. 若对所有在某区间内的x值，$f'(x) = 0$，则f(x)在该区间内为一常数。 2. 若对所有在某区间内的x值，$f'(x) = g'(x)$，则f(x)与g(x)在该区间内的差为一常数。

内容	时间分配	教学建议
		3. 证明若 $\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$ ，则方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ 在 0 与 1 之间有至少一个根。
	28	